

艾森斯坦因判别法的一个等价命题

吴春花¹, 唐仙芝²

(1. 洛阳市财会学校, 河南 洛阳 471000; 2. 黄河水利职业技术学院, 河南 开封 475001)

摘要: 判定整系数多项式的不可约性, 艾森斯坦因判别法[1] (以下简称“艾法 1”)是高等代数中给出的主要方法之一。但“艾法 1”中所给条件只是一个充分条件, 故有些多项式用“艾法 1”不能判别其是否可约。本文给出了艾森斯坦因判别法的一个等价命题(以下简称“艾法 2”), 弥补了“艾法 1”的一些不足。

关键词: 整系数多项式; 不可约; 艾森斯坦因判别法; 等价命题

中图分类号: 015

文献标识码: A

文章编号: 1008-486X(2001)01-0026-02

An Equivalent Proposition of Eisenstein Discrimination Method

WU Chun-hua

TANG Xian-zhi

Abstract: Eisenstein Discrimination Method¹ to decide the irreducibility of the multinomial polynomial of integral coefficients is one of the main methods offered in higher algebra. As the condition given in Eisenstein Method¹ is only a sufficient one, whether some multinomial polynomials are irreducible or not can't be decided by this method. The equivalent proposition given here makes up the weakness of Eisenstein Method¹.

Key words: multinomial polynomial of integral coefficients; irreducibility; Eisenstein Discrimination Method; equivalent proposition

1 引言

艾森斯坦因判别法判定整系数多项式的不可约性, 存在一定的局限。本文给出了判定多项式不可约的一种新的方法。

2 命题及证明

定理(艾法 2) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ($a_0 \neq 0$) 是一整系数多项式, 如果有一素数 P , 使得

$$(1) \quad P \nmid a_0$$

$$(2) \quad P \mid a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$(3) \quad P^2 \nmid a_n$$

则 $f(x)$ 在有理数域上不可约。

证: <用反证法>

假设 $f(x)$ 是可约的。则由可约性定理存在

$$f_1(x), f_2(x)$$

$$f_1(x) = b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0$$

$$f_2(x) = c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0$$

$$\text{其中 } k < n, m < n, k + m = n$$

$$\text{使 } f(x) = (b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \dots + b_0)(c_m x^m + c_{m-1} x^{m-1} + \dots + c_0) \dots \dots \dots (1)$$

将(1)式右边展开, 由多项式的相等有:

$$\begin{cases} a_n = b_k c_m \\ a_{n-1} = b_k c_{m-1} + b_{k-1} c_m \\ a_{n-2} = b_k c_{m-2} + b_{k-1} c_{m-1} + b_{k-2} c_m \\ \dots \dots \dots \\ a_{n-k} = b_k c_{m-k} + \dots + b_0 c_m \dots \dots \dots (2) \\ \dots \dots \dots \\ a_0 = b_0 c_0 \end{cases}$$

由(2)的第一个等式, 因为 $P \mid a_n$

所以 $P \mid b_k$ 或 $P \mid c_m$

又因为 $P^2 \nmid a_n$, 所以 $P \mid b_k$ 与 $P \mid c_m$ 不能同时成立, 现在不妨设 $P \mid b_k$ 但 $P \nmid c_m$

再由(2)的第二个等式, 因为 $P \mid a_{n-1}$, 且 $P \mid b_k$

收稿日期: 2000-06-14

作者简介: 吴春花(1964-), 女(朝鲜族), 吉林省延吉市人, 讲师, 从事数学教学工作; 唐仙芝(1967-), 女, 河南开封人, 讲师, 从事数学教学工作。

所以 $p \nmid b_{k-1}c_m$
因为 $p \nmid c_m$, 所以 $p \nmid b_{k-1}$
同理, 依次类推, 得到 $p \nmid b_k, \dots, b_1$
(2) 中的第 $k+1$ 式:
$$a_{n-k} = b_k c_{m-k} + \dots + b_1 c_{m-1} + b_0 c_m$$
则 $p \nmid b_0 c_m$
因为 $p \nmid c_m$, 所以 $p \nmid b_0$
(若 $k > m$, 则 $k-m=t$, 前七项为 0, $a_{n-k} = b_m c_0$
 $+ \dots + b_0 c_m$)
由(2)最后一个等式 $a_0 = b_0 c_0$ 知:
 $b_0 \mid a_0$, 而由前知 $p \nmid b_0$
所以, $p \nmid a_0$. 与已知矛盾. 故假设不成立.
若设 $p \nmid b_k, p \nmid c_m$ 同理可证.
依此定理.
对于多项式 $f(x) = 5x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 10x^2 + 6$,
存在一个素数 $p=5, p \nmid 6, p \nmid 5, 15, 20, 10, 0$, 但 $p^2 \nmid 5$,
故知 $f(x)$ 是不可约的.

3 证明“艾法 1”与“艾法 2”等价

证明: <1>、用“艾法 2”证明多项式为不可约,
则用“艾法 1”证明也是不可约的.
设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ 满足“艾法 2”
的条件, 即存在 p , 使得 $p \nmid a_0, p \nmid a_1, \dots, a_n, p^2 \nmid a_n$, 其中
 p 为素数, 故知 $f(x)$ 为不可约的. 现在用“艾法 1”来
证明.

作多项式函数 $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$
则 $g(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0 x^n$
因为存在素数 $p, p \nmid a_0, p \nmid a_1, \dots, a_n, p^2 \nmid a_n$, 所以,
由“艾法 1”知 $g(x)$ 是不可约的,
若 $f(x)$ 是可约的, 则由可约性定理
 $f(x) = f_1(x)f_2(x), \partial(f_1(x)) = k_1, \partial(f_2(x)) = k_2$
 $k_1 < n, k_2 < n, k_1 + k_2 = n$
所以, $g(x) = x^{k_1} x^{k_2} f_1(\frac{1}{x}) f_2(\frac{1}{x})$
$$= [x^{k_1} f_1(\frac{1}{x})] [x^{k_2} f_2(\frac{1}{x})]$$
$$= (b_{k_1} x^{k_1} + \dots + b_0) (c_{k_2} x^{k_2} + \dots + c_0)$$
则 $g(x)$ 可分解为两个次数较低的多项式的积,

这与 $g(x)$ 不可约相矛盾.
故 $f(x)$ 是不可约的.
<2> 用“艾法 1”证明多项式是不可约的, 用
“艾法 2”证明也是不可约的.
设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$, 存在 p (素
数), 使得 $p \nmid a_n, p \nmid a_0, a_1, \dots, a_n, p^2 \nmid a_0$. 由“艾法 1”知 f
(x) 是不可约的,
现在“艾法 2”证明其也为不可约, 作多项式函
数 $g(x) = x^n f(\frac{1}{x})$

$$g(x) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0 x^n$$
由已知条件知 $g(x)$ 满足“艾法 2”的条件, 所以 g
(x) 为不可约.
假设 $f(x)$ 为可约的, 则有
 $f(x) = f_1(x)f_2(X), \partial(f_1(x)) = k_1, \partial(f_2(X)) = k_2$
 $k_1 < n, k_2 < n, k_1 + k_2 = n$
则 $g(x) = x^{k_1} x^{k_2} f_1(\frac{1}{x}) f_2(\frac{1}{x})$
$$= [x^{k_1} f_1(\frac{1}{x})] [x^{k_2} f_2(\frac{1}{x})]$$
$$= (b_{k_1} x^{k_1} + \dots + b_0) (c_{k_2} x^{k_2} + \dots + c_0)$$

所以 $g(x)$ 为可约, 产生矛盾.
故假设不成立. 所以, $f(x)$ 为不可约.
综上, “艾法 1”与“艾法 2”等价.

4 应用举例

例 1 判别 $f(x) = 7x^4 + 21x^3 + 14x^2 + 28x + 5$
的可约性.

解: 用“艾法 1”不能直接判定.
但 $p=7, p \nmid 5, p \nmid 7, 21, 14, 28, p^2=49$, 所
以 $p^2 \nmid 7$

由“艾法 2”可知 $f(x)$ 不可约.
例 2 判别 $f(x) = 7x^6 + 11x^5 + 33x^4 + 66x^3 +$
 $44x^2 + 11x + 22$ 的可约性

解: 用“艾法 2”不能直接判定,
但 $p=11, p \nmid 7, p \nmid 11, 33, 66, 44, 11, 22, p^2=121$,
 $p^2 \nmid 22$

用“艾法 1”可知 $f(x)$ 不可约.
虽然, 二者是等价的, 但其作用不尽相同, 应视
具体情况, 灵活运用.

参考文献:

[1] 北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1978. 33—34