DOI:10.13681/j.cnki.cn41—1282/tv.2002.03.024
第14卷 第3期 黄河水利职业技术学院学报 Vol.14 No.3
2002年7月 Journal of Yellow River Conservancy Technical Institute Jul.2002

再谈求矩阵 A^{+} 的初等变换法

姜淑莲,彭立新
(武汉船舶职业技术学院,湖北 武汉 430050)

摘 要:通过初等变换法,给出把矩阵 A 作满秩分解 $A=FG$ 中求 F、G 的一般方法,是求出 A 的广义逆。

关键词:矩阵;初等变换;广义逆
中图分类号:O151 **文献标识码**:A **文章编号**:1008—486X(2002)03—0054—02

On the Elementary Transformation Method of Finding Matrix A^{+}

JIANG Shu-lian, PENG Li-xin
(Wuhan Shipping Vocational and Technical Institute, Wuhan 430050, Hubei, China)

Abstract: This paper gives the general method of finding F and G in the full rank decomposition of matrix A —— A=FG —— by means of elementary transformation. To find F and G is to find the generalized inverse of A.

Key words: matrix; elementary transformation; generalized inverse

在文献[1]中,通过一个具体的实例,给出了求矩阵 A^{+} 的初等变换法,而 A^{+} 的求解,关键在于把 A 作满秩分解 $A=FG$。因此,本文将通过初等变换法,给出求 F、G 的一般方法。

定义:设 A 是 $m\times n$ 一个矩阵,若有 $n\times m$ 矩阵 X 满足下列四个条件:

(1) $AXA=A$; (3) $(AX)^H=AX$;
(2) $XAX=X$; (4) $(XA)^H=XA$。

则称 X 为 A 的 *Moore-Renrose* 广义逆,记为 A^{+}。

定理:对于任何 $m\times n$ 矩阵 A,A^{+} 是存在且惟一的。

我们可以利用矩阵 A 的满秩分解,*Moore-Renrose* 广义逆 A^{+}。

引理:设 A 是一个秩为 $r(>0)$ 的 $m\times n$ 矩阵,它的满秩分解为 $A=FG$,则 $A^{+}=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$,其中 F 为秩 r 的 $m\times r$ 矩阵,G 为秩 r 的 $r\times n$ 矩阵。

不难证明:$X=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$ 是 A 的一个 *Moore-Renrose* 广义逆,由惟一性知 $X=A^{+}$。

由此引理可看出,我们求 A^{+},关键在于把 A 作满秩分解 $A=FG$。只要能够求出 F、G,然后代入就可求出 A^{+}。下面,我们通过初等变换法,来求解 F、G,从而得到求矩阵 A^{+} 的一般方法。

1 利用矩阵的初等行变换,求矩阵 A 的 *Moore-Renrose* 广义逆 A^{+}

由于 $R(A)=r>0$,所以它有 r 个线性无关的列向量,而其余的 $n-r$ 个列向量均可由这 r 个列向量线性表出。不妨假设 A 的前 r 个列向量是线性无关的,并将 A 分块表示为

$$A=\left[\underset{m\times r}{A_1}\ \vdots\ \underset{m\times(n-r)}{A_2}\right],$$

那么存在 $r\times(n-r)$ 矩阵 S,使 $A_2=A_1S$,从而

$$A=[A_1\mid A_1S]=A_1[I_r\mid S]$$

令 $F=A_1$,$G=[I_r\mid S]$,显然 F、G 是满秩矩阵,且 $A=FG$ 是 A 的一个满秩分解。

例1 已知 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$,求 A^{+}。

解:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&-2\\-1&1&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

因此,取 A 的前两个列向量所组成的矩阵为 F,即

$$F=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$$

而取 G 为 $G=\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$

显然 F,G 是满秩矩阵,且 $A=FG$。

即 $A^{+}=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$

$$=\begin{pmatrix}1/10&3/10&-1/20&1/20\\2/5&1/10&3/10&-3/10\\-1/10&-3/10&1/20&-1/20\end{pmatrix}$$ 为所求。

2 利用矩阵的初等列变换,求矩阵 A 的 *Moore-Renrose* 广义逆 A^{+}

设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$

收稿日期:2001—11—20
作者简介:姜淑莲(1966—),女,辽宁葫芦岛人,讲师,主要从事数学教学与研究工作。

且 $R(A)=r$

令 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 A 的列向量，β_1 表示 A 的第 i 列的 m 维列向量。

作辅助阵 $\bar{A}$，即

$$\bar{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix}$$

对辅助阵 $\bar{A}$ 作初等列变换，求出列向量组极大无关组

$$\bar{A}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0\cdots \\ b_{r+11} & b_{r+12} & \cdots & b_{r+1r} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{r+21} & b_{r+22} & \cdots & b_{r+2r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mr} & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_r & \beta_{r+1}-\sum\limits_{i=1}^{r}c_{i1}\beta_i & \cdots & \beta_n-\sum\limits_{i=1}^{r}c_{in-r}\beta_i \end{pmatrix}$$

可见 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 为 A 的列向量极大无关组，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$(不妨设)也是 A 的列向量极大无关组，且有

$$\begin{cases} \beta_{r+1}-\sum\limits_{i=1}^{r}c_{i1}\beta \\ \beta_n-\sum\limits_{i=1}^{r}c_{in-r}\beta_i \end{cases}$$

这说明 $\beta_{r+1},\beta_{r+2},\cdots,\beta_n$ 分别可以用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性表出，其中 $c_{i1},c_{i2},\cdots,c_{in-r}(i=1,2,\cdots,r)$ 分别至少有一个不为 0。

依据极大线性无关组 β_1、β_2、$\cdots$、β_r 可构成一个 $m\times r$ 矩阵 F。

$$F=(\beta_1、\beta_2、\cdots、\beta_r)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{pmatrix}$$

用 β_1、β_2、$\cdots$、β_r 表示 A 的列向量的坐标构成一个 $r\times n$ 矩阵 G，

$$\beta_1=1\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2+\cdots+0\cdot\beta_r$$
$$\beta_2=0\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+\cdots+0\cdot\beta_r$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_r=0\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2+\cdots+0\cdot\beta_r$$
$$\beta_{r+1}=c_{11}\cdot\beta_1+c_{21}\cdot\beta_2+\cdots+c_{r1}\cdot\beta_r$$
$$\cdots\cdots$$
$$\beta_n=c_{1n-r}\cdot\beta_1+c_{2n-r}\cdot\beta_2+\cdots+c_{rn-r}\cdot\beta_r$$

即 $$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn-1} & & & & \end{pmatrix}=(I_r|C)$$

其中 $$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n-r} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & a_{2n-r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \cdots & c_{rn-r} \end{pmatrix}$$

故 $F=(\beta_1、\beta_2、\cdots、\beta_r)_{m\times r}$

$$G=(I_r|C)=(F|FC)=(F|\sum_{i=1}^{r}c_{i1}\beta_i\ \sum_{i=1}^{r}c_{i2}\beta_i\cdots\sum_{i=1}^{r}c_{in-r}\beta_i$$
$$=(F|\beta_{r+1}\ \beta_{r+2}\cdots\beta_n)=A$$

说明 F、G 是 A 的一个满秩分解。

例 2　就例 1 用此方法求解。

解：1°令 β_1,β_2,β_3 为 A 的列向量，β_i 表示 A 的第 i 列的 4 维列向量。

作辅助阵 $\bar{A}$，即 $$\bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}$$

2°对辅助阵 $\bar{A}$ 作初等列变换，求出列向量组极大无关组

$$\bar{A}\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \beta_1 & -\beta_1+\beta_2 & \beta_1+\beta_3 \end{pmatrix}$$

而 $R(A)=2$，可见 β_1,β_2 是 A 的列向量极大无关组，且有 $\beta_3=-\beta_1$。

3°依据极大线性无关组 β_1,β_2 构成一个 4×2 矩阵 F

$$F=(\beta_1\quad\beta_2)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

用 β_1,β_2 表示 A 的列向量的坐标构成一个 2×3 矩阵 G，

$$\beta_1=1\cdot\beta_1+0\cdot\beta_2$$
$$\beta_2=0\cdot\beta_1+1\cdot\beta_2$$
$$\beta_3=-1*\beta_1+0*\beta_2$$

即 $$G=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4°　$A^{+}=G^H(F^HAG^H)^{-1}F^H$

$$=\begin{pmatrix} 1/10 & 3/10 & -1/20 & 1/20 \\ 2/5 & 1/10 & 3/10 & -3/10 \\ -1/10 & -3/10 & 1/20 & -1/20 \end{pmatrix}$$

为所求。

参考文献：

[1]　赵昌成.求矩阵 A^{+} 的初等变换法[J].数学通报，1996，(2).
[2]　于寅.高等工程数学[M].武汉：华中理工大学出版社，1995.

［责任编校　杨道富］