

单桩 P-s 曲线的灰色模型拟合及极限承载力预测

王俊梅¹ 丛晓明² 刘海宁³

(1. 华北水利水电学院, 河南 郑州 450008; 2. 油岩土工程有限公司盘锦分公司, 辽宁 盘锦 124000;)

3. 中国科学院地质与地球物理研究所, 北京 100029)

摘要:以灰色系统理论中的 GM(1, 1) 模型为基础, 利用残差模型、等维新信息外延模型对其进行修正, 实现了对单桩 P-s 曲线的拟合和极限承载力的预测, 论证了以灰色系统理论对单桩承载力进行预测的意义。灰色预测具有要求数据少、计算简单而严密、精度高等优点。如借助于计算机进行计算分析, 分析速度快, 结果可信度高, 因而在工程中具有较高的实际应用价值。

关键词:单桩 P-s 曲线; P 灰色模型; 拟合; 极限承载力; 预测

中图分类号: TU473.11

文献标识码: A

文章编号: 1008-486X(2006)04-0027-04

0 引言

随着高层建筑的增多, 大吨位基桩的应用越来越普遍。因而, 如何有效地确定单桩极限承载力成为实际工程中的重要问题之一。确定单桩极限承载力有静荷载试验、动荷载试验、理论分析及经验公式等多种方法, 其中, 较为成熟、可靠的是静荷载试验。静荷载试验对于小基桩, 可以做到破坏, 但是随着基桩吨位的逐渐增大, 试验做到破坏的难度也越来越大。对此, 国内外不少学者进行了大量地实际研究和理论分析, 提出了不少外推的方法, 例如指数外推法和双曲线外推法等。

灰色系统理论是我国著名学者邓聚龙教授 1982 年创立的一门新兴横断学科, 它以“部分信息已知, 部分信息未知”的“小样本”、“贫信息”不确定性系统为研究对象, 主要通过“部分”已知信息的生成、开发, 提取有价值的信息, 实现对系统运行行为的正确认识和有效控制。单桩极限承载力的预测是一个十分复杂的问题, 其影响因素较多, 而且对各种影响因素的确定尚没有、也不可能达到很精确的程度。因此, 将其视为一个灰色系统来加以研究, 是完全可行的。

静荷载试验的 P-s 曲线多为单调递增, 呈现出由渐变到突变的发展过程, 这种沉降变形适用于灰色 GM(1, 1) 模型。本文以完整的静荷载曲线为基础, 取前几级沉降为原始数据, 对 P-s 曲线进行拟合、预测, 并用实际的曲线检验预测曲线, 根据需要采用残差模型和等维新信息外延模型对 GM(1, 1) 模型进行修正, 以提高预测精度。

1 灰色模型

1.1 灰色 GM(1, 1) 模型的建立

设有一连续的原始观测数据 $\{S^{(0)}_n\}$, 将该数列作逐次累加, 生成新的数列 $\{S^{(1)}_n\}$,

$$S_k^{(1)} = \sum_{i=1}^k S_i^{(0)} \quad (1)$$

其近似建立白化形式的动态微分方程:

$$\frac{ds^{(1)}}{dt} + as^{(1)} = u \quad (2)$$

式中参数矩阵, 用最小二乘法求得:

$$\hat{a} = [a, u]^T = [B^T B]^{-1} \cdot B^T \cdot Y$$

$$\text{其中 } B = \begin{bmatrix} -(S_2^{(1)} + S_1^{(1)})/2 & 1 \\ -(S_3^{(1)} + S_2^{(1)})/2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ -(S_{n-1}^{(1)} + S_n^{(1)})/2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y^T = [S_2^{(0)}, S_3^{(0)}, \dots, S_n^{(0)}] \quad (3)$$

上述 GM(1, 1) 模型中, 要求原始数列 $\{s^{(n)}_n\}$ 是等间距的观测值。解上述微分方程后, 可得白化形式的数列如下:

$$\hat{S}_k^{(1)} = (S_1^{(0)} - \mu/\alpha) e^{-\alpha(k-1)} + \mu/\alpha \quad (4)$$

预测值

$$\hat{S}_k^{(0)} = \hat{S}_k^{(1)} - \hat{S}_{k-1}^{(1)} \quad (5)$$

1.2 灰色模型的精度检验

灰色预测就是通过建立灰色模型, 发现、掌握系统的发展规律, 对系统的未来状态做出科学的定量预测。而模型要经过检验才能判断其是否合理、正确, 依此决定是否可用来做预测。有 4 种方法可对模型进

收稿日期: 2006-05-31

作者简介: 王俊梅(1978-), 女, 河北邢台人, 助教, 工学硕士, 主要从事岩土工程及工程物探方面的教学与科研工作。

行检验：相对误差检验、关联度检验、均方差比值检验、后验差检验。

1.2.1 相对误差检验

平均模拟相对误差为残差数列与原始数列的比值的平均值，计为 $\bar{\Delta}$ 。其中，残差数列为原始数列与模拟数列的差值。对于给定的相对误差 α ，当 $\bar{\Delta} < \alpha$ 且 $\Delta_n < \alpha$ 成立，则该模型为残差合格模型。

1.2.2 关联度检验

关联度分析是分析系统中各因素关联程度的方法，其基本思想是根据曲线间的相似程度来判断关联程度。 ε 为原始序列 $S^{(0)}$ 与模拟序列 $\hat{S}^{(0)}$ 的绝对关联度。若对于给定的 $\varepsilon_0 (\varepsilon_0 > 0)$ ，有 $\varepsilon > \varepsilon_0$ ，则模型关联度合格。

1.2.3 均方差比值检验

若 $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x^{(k)}$ ， $S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x^{(k)} - \bar{x})^2$ 分别为原始序列 $S^{(0)}$ 的均值和方差； $\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varepsilon^{(k)}$ ， $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\varepsilon^{(k)} - \bar{\varepsilon})^2$ 分别为残差的均值和方差； $C = \frac{S_2}{S_1}$ 称为均方差比值，对于给定的 $C_0 (C_0 > 0)$ ，当 $C < C_0$ 时，模型的均方差比合格。

1.2.4 后验差检验

$p = p(|\varepsilon^{(k)} - \bar{\varepsilon}| < 0.6745 S_2)$ 称为小误差概率。对于给定的 $p_0 (p_0 > 0)$ ，当 $p > p_0$ 时，模型小误差概率合格。

在给定 α ， ε_0 ， C_0 ， p_0 的值后，就可以确定检验模型模拟精度的等级。常用的精度等级见表 1。如果通过精度检验，发现变形预测数据模型的精度不够，那么可建立残差模型用以补偿。它是以前述残差序列 $\varepsilon^{(0)}$ 作为原始序列的。利用残差模型可以计算出第 i 时刻的原预测模型的补偿修正值，将其与原预测模型对应时刻的预测值相加，便可以达到精度补偿的目的。这种补偿方式可以反复使用，直到精度满足要求为止。

表 1 精度检验等级参照表

Table 1 Precision grades of verifying

精度等级	相对误差 α	关联度 ε_0	均方差比值 C_0	小误差概率 p_0
1	0.01	0.90	0.35	0.95
2	0.05	0.80	0.50	0.80
3	0.10	0.70	0.65	0.70
4	0.20	0.60	0.80	0.60

另外，也可以利用等维新信息外延模型来提高预测的精度。对于原始沉降数列 $S^{(0)} = (S_{(1)}^{(0)}, S_{(2)}^{(0)}, S_{(3)}^{(0)}, \dots, S_{(n)}^{(0)})$ ，把由 GM(1, 1) 模型预测得到预测值 $\hat{S}_k^{(0)}$ 作为系统内的值，然后，去掉原始数列中的 $S_1^{(0)}$ ，增加新信息 $\hat{S}_{i+1}^{(0)}$ ，再进行建模预测。

1.3 灰色模型拟和与预测数据的优化

预测精度的优化包括原始数据优化、GM(1, 1) 模型优化及预测结果的经验修正 3 部分。一个好的预测结果既依赖于预测系统又依赖于现场的原始数据，二者缺一不可。对不太规则的数据，根据 P-s 曲线进行平滑处理，其表达式为

$$s(i) = (s(i-1) + 2s(i) + s(i+1))/4$$

其中， $1 < i < k$ (6)

最后一个数据由于其对预测曲线的走向影响较大，往往不进行处理。

GM(1, 1) 模型的优化主要是建立残差 GM(1, 1) 模型，并将该模型所获得的残差预测值与原 GM(1, 1) 模型的预测值相叠加，从而对模型进行修正。

用于建模的 P-s 曲线的数据在达到塑性状态前，GM(1, 1) 模型的预测结果往往产生较大的误差。这主要是因为曲线的内在规律没有完全显现出来。此时，需要对预测结果乘上一个经验系数，范围为 0.75 ~ 0.85。对于 P-s 曲线末段不出现竖向陡降段，基桩不呈现明显的破坏荷载的情况（端承摩擦桩），校正系数应选择较大值；对于 P-s 曲线末端呈现陡降段，基桩呈现明显破坏荷载的情况（摩擦桩、摩擦端承桩、端承桩）校正系数应选择较小值。校正系数的选择还与桩的沉降有关，当沉降 $s < 10\text{mm}$ 时，校正系数应选择较小值；当沉降 $10\text{mm} < s < 20\text{mm}$ 时，校正系数应选择较大值；当沉降 $s > 20\text{mm}$ 时，则可不作校正。

2 承载力预测应用

2.1 工程概况

该工程桩基础采用大吨位的人工挖孔桩，桩的竖向极限承载力大部分都在 1000t 以上，桩径在 0.8 ~ 1.6m 之间。笔者利用上述灰色系统方法，对该工程的 3 根（A-23、B-27、C-16）不同位置的桩进行了预测分析。

2.2 灰色模型拟合及预测结果分析

为了检验模型是否能够作为单桩极限承载力预测的一种手段，取已通过单桩竖向静载荷试验，并得出桩的极限承载力的 B-27 桩进行计算分析。依次取桩 B-27 的前 6 级、前 7 级、...、前 11 级、前 12 级荷载的数据进行计算分析，得出小概率误差均为 1，其他计算结果见表 2。从表 2 可以看出，P 预测与 P 实测的比值为 0.989 ~ 1.056，平均相对误差量仅为 1.27%。后验差值为 0.065 ~ 0.196 之间，明显小于 0.35，由此可见其预测精度较高。所以用灰色系统理论预测单桩的极限承载力取得的效果较好，预测值和实测值非常接近，证明灰色模型可以进行单桩极限承载力的预测。如对各级预测结果取平均值，则竖向极

限承载力的值为 25 342kN, 则会发现平均值更加接近真实值(正的和负的误差可以抵消一部分)。另外, 从预测结果可以看出:当级数取 6 级时, P 预测/P 实测的比值为 1.039, 相对误差为 3.9%;当级数取 9 级时 P 预测/P 实测的比值为 1.004, 相对误差为 0.4%。可见, 荷载级数取值的多少对预测精度有一定的影响, 级数较少时, 预测的误差相对较大, 级数较多时, 预测的误差相对较小。故当利用灰色模型对没有做到破坏的桩进行竖向极限承载力预测时, 所选的

原始观测数据加载级数不宜太小, 一般情况下应大于 5 级。

用上述方法也可预测出 A-23 桩和 C-26 桩的竖向极限承载力。A-23 桩采用灰色 GM(1, 1) 模型所取得的预测结果较好, 精度较高, 具体预测结果见表 3。为了更好地对 GM(1, 1) 模型、残差模型、等维新信息模型等 3 个模型的精度进行比较, 对桩 A-23 分别采用 3 个模型进行预测, 预测值与原始值的关系见表 3。其中关联度分别为 0.54, 0.74, 0.6; 均方差比

表 2 B-27 桩单桩的竖向极限承载力预测成果表

Table 2 Vertical ultimate bearing capacity results forecasted of single pile B-27

等级	荷载 (kN)	沉降 (mm)	发展系数 -a	灰作用量 b	P 预测	P 实测	P 预测/P 实测	后验差 C
6	13212	1.86	0.211	0.54	26012	25026	1.039	0.083
7	15414	2.96	0.283	0.338	26424	25026	1.056	0.196
8	17616	4.6	0.286	2.74	24759	25026	0.989	0.119
9	19818	5.16	0.301	0.307	25123	25026	1.004	0.171
10	22020	6.94	0.290	0.368	25026	25026	1.000	0.125
11	24222	9.25	0.285	0.395	25030	25026	1.001	0.089
12	26424	12.41	0.285	0.396	25026	25026	1.000	0.065

表 3 3 种模型对 A-23 桩的预测值与原始值对比表

Table 3 Comparison of A-23 forecasting results and original results by three models

沉降量数据 (mm)		0.43	0.63	0.78	0.82	0.94	1.08	1.39	1.39	1.58	1.71	2.08
沉降量模拟预测值 (mm)	GM(1, 1) 模型	0.43	0.63	0.73	0.84	0.98	1.13	1.31	1.31	1.52	1.77	2.05
	残差模型	0.43	0.63	0.73	0.84	0.98	0.7	1.32	1.32	1.53	1.77	2.05
	等维新信息模型	0.43	0.63	0.78	0.82	0.94	1.08	1.33	1.33	1.54	1.78	2.06
相对误差 (%)	GM(1, 1) 模型	0	0	6.94	2.68	3.9	4.9	4.45	4.45	3.51	3.42	1.38
	残差模型	0	0	0	0	3.9	34.91	5.05	5.05	3.23	3.62	1.25
	等维新信息模型	0	0	0	0	0	0	3.97	3.97	2.35	4.29	0.89

值分别为 0.09, 0.23, 0.063; 小概率误差均为 1。从预测结果精度检验中的相对误差检验可以看出, 等维新信息外延模型模拟预测值和原始数据的相对误差明显小于 GM(1, 1) 模型和残差模型与原始数据的相对误差。等维新信息外延模型模拟预测值的关联度为 0.60, 小于残差模型模拟预测值的关联度 0.74, 大于 GM(1, 1) 模型模拟预测值的关联度 0.54。等维新信息外延模型模拟预测值的均方差比值为 0.063, 远小于 GM(1, 1) 模型和残差模型模拟预测值的均方差比值 0.09 和 0.23。当然, 3 个模型的概率误差均为 1。从以上精度检验可以看出, 等维新信息外延模型所取得的预测精度高于 GM(1, 1) 模型和残差模型。据原始数据, 利用灰色模型模拟预测桩 A-23、桩 B-27、桩 C-26 的 P-s 曲线如图 1~3 所示。从图 1~3 可以看出, 利用灰色模型模拟预测桩的 P-s 曲线和现场试验原始观测的 P-s 曲线拟合的效果非常好, 从而表明在实际工程中灰色模型可以模拟预测

桩的 P-s 曲线, 并可以得出其竖向极限承载力。

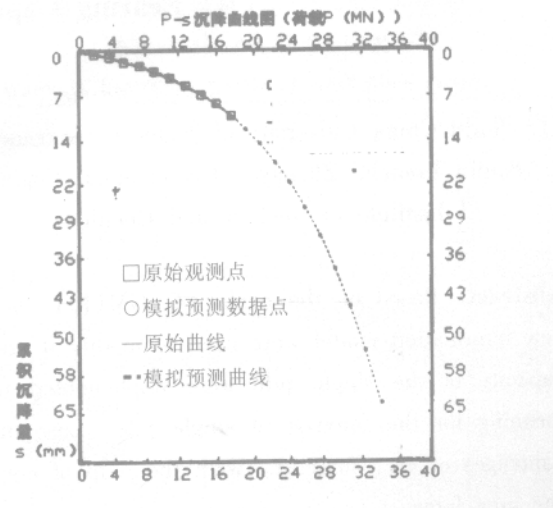


图 1 A-23 桩采用 GM(1, 1) 模型预测的 P-s 曲线
Fig.1 P-s curve forecasted by pile A-23 using GM(1, 1) model

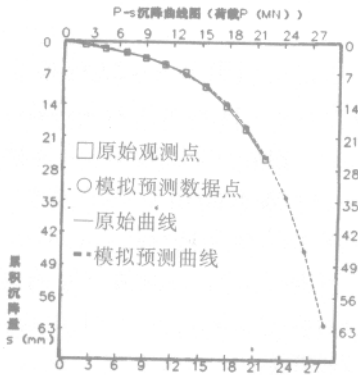


图2 桩 B-27 采用 GM(1,1)模型预测的 P-s 曲线
 Fig.2 p-s curve forecasted by pile B-27 using GM(1,1) model

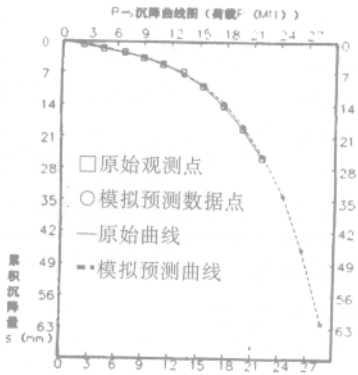


图3 桩 C-16 采用 GM(1,1)模型预测的 P-s 曲线
 Fig.3 P-s curve forecasted by pile C-16 using GM(1,1) model

3 结论

静荷载试验将岩土体与桩的相互作用、相互影响因素的结果转化为一个定量的指标——沉降量,而其中的相互作用、相互影响因素的结果到底多大,却不是十分清楚。灰色系统从理论上通过序列生成寻求现实规律,对这一“贫信息、不确定”的问题,进行对桩土系统的分析。GM(1,1)模型表面上是单因素分析,而实际上是全因素分析,只是这些因素表现为一个综合的指标。对于桩土这一受多因素共同影响的系统,在不十分清楚有多少影响因子及各相关影响因子的作用具体多大时,将各因素的共同作用结果作为一个总的影晌因子考虑是合理的。若所取得的 P-s 关系曲线已经概括了各方面影响因素,即影响桩承载力的各方面因素在前几级荷载中均已发挥了各自的影响作用,则预测曲线准确度较高。反之,则预测曲线结果的精度较低。

参考文献:

[1] 郭大兵,郭靖. 桩基极限承载力的灰色预测[J]. 工业建筑,1996(4):45-49.
 [2] 刘思峰. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京:科学技术出版社,1999:4-5.
 [3] 刘汉东. 边坡失稳时预报理论与方法[M]. 郑州:黄河水利出版社,1996:64-65.

[责任编辑 杨明庆]

Grey Model Imitation of P-s Curve and Forecast of Ultimate Bearing Capacity of the Single Pile

WANG Jun-mei¹, CONG Xiao-ming², LIU Hai-ning³

- (1. North China University of Water Conservancy and Electric Power, Zhengzhou 450008, Henan, China;
 2. Panjin Branch, Zhongyou Geotechnical Engineering Co Ltd., Panjin 124000, Liaonig, China;
 3. Institute of Geology and Geophysics, Chinese Academy of Science, Beijing 100029, China)

Abstract: Based on the model of GM(1,1) of grey system, the residual model and the equal dimensional new information model were used to modify it and the imitation of P-s curve and forecast of ultimate bearing capacity of the single pile were implemented in this paper. And the grey model theory had a practical meaning for the forecast of single pile. Less information, brief calculation and high precision are the advantages of grey forecast. With the help of computer, we can get the quick analysis, reliable forecast. So the grey forecast has a practical value in engineering.

Key words: grey model; imitation; ultimate bearing capacity; forecast